КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СИЛЬНАЯ ИЗОХРОННОСТЬ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ СИСТЕМ КОШИ — РИМАНА С ОДНОРОДНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ЛИНЕЙНОГО ЦЕНТРА

В.В. Амелькин[1], **Д. Доличанин-Джекич**[2]

[1] Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
vamlkn@mail.ru
[2] Государственный университет, Нови Пазар, Сербия
dolichanin_d@yahoo.com

Рассмотрим вещественную динамическую систему вида

$$\dot{x} = \lambda x - y - P(x,y), \quad \dot{y} = x + \lambda y + Q(x,y), \tag{1}$$

где λ — некоторая постоянная (которая может быть и равной нулю), а $P, Q : G \to \mathbb{R}$ — голоморфные в окрестности $G = \{(x,y) \mid |x| < r, \ |y| < r\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, начала координат $O(0,0)$ фазовой плоскости функции, которые не содержат в своих разложениях в степенные ряды по переменным x и y свободных и линейных членов.

Точка $O(0,0)$ является для системы (1) особой точкой. При $\lambda \neq 0$ – это грубый фокус, а при $\lambda = 0$ – или центр, или негрубый фокус.

Определение 1 [1]. Центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) называется изохронным (изохронным первого порядка), если все изображающие точки, лежащие на некотором луче OA, начиная двигаться в момент времени $t = t_0$ по траекториям центра или фокуса, совершают каждый полный оборот за одно и то же время $T = 2\pi$.

Пусть $\varphi_0 + 2\pi q/n$, $q = \overline{0, n-1}$, — полярные углы $n \geqslant 2$ лучей l_ν, $\nu = \overline{1,n}$, с началом в точке $O(0,0)$.

Определение 2 [2]. Центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) называется сильно изохронным порядка n, если все изображающие точки, лежащие на n лучах l_ν, $\nu = \overline{1,n}$, начиная двигаться в момент времени $t = t_0$ по траекториям центра или фокуса, переходят последовательно с одного из указанных n лучей на другой за одно и то же время $T = 2\pi/n$.

Обычно систему (1), имеющую изохронный, сильно изохронный порядка n центр или фокус в особой точке $O(0,0)$, называют соответственно изохронной и сильно изохронной порядка n в особой точке $O(0,0)$.

При этом если центр или фокус системы (1) оказывается сильно изохронным порядка n при любом начальном положении луча OA, то говорят, что для системы (1) имеет место общая сильная изохронность порядка n.

Если же центр или фокус системы (1) являетя сильно изохронным порядка n лишь только при некотором начальном положении луча OA, то говорят, что для системы (1) имеет место частная сильная изохронность порядка n.

Замечание. Для изохронной первого порядка системы (1) в случае центра $O(0,0)$ всегда имеет место общая изохронность.

Ниже рассматривается подкласс вещественной динамической системы (1) — системы вида

$$\dot{x} = -y - P(x,y), \quad \dot{y} = x + Q(x,y), \tag{2}$$

где P и Q являются однородными относительно x и y полиномами одной и той же произвольной степени p, удовлетворяющими условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}. \tag{3}$$

Система (2) при условиях (3) записывается [3] в виде

$$\dot{x} = -y + \sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]} (-1)^k (aC_p^{2k} x^{p-2k} y^{2k} - bC_p^{2k+1} x^{p-2k-1} y^{2k+1}),$$

$$\dot{y} = x + \sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]} (-1)^k (bC_p^{2k} x^{p-2k} y^{2k} + aC_p^{2k+1} x^{p-2k-1} y^{2k+1}), \tag{4}$$

где $[\frac{p}{2}]$ — целая часть числа, C_p^r — число сочетаний из p по r ($C_p^0 = 1$, $C_p^r = 0$, если $r > p$), a и b — некоторые параметры такие, что $a^2 + b^2 \neq 0$, и в полярных координатах ρ, φ ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) имеет представление [3]

$$\dot{\rho} = (a\cos m\varphi - b\sin m\varphi)\rho^{m+1},$$

$$\dot{\varphi} = 1 + (a\sin m\varphi + b\cos m\varphi)\rho^m, \quad m = p - 1.$$

Системы Коши — Римана вида (1) обладают рядом специфических свойств, одно из которых состоит в том, что особая точка $O(0,0)$ таких систем при $\lambda = 0$ — это всегда изохронный центр.

Введем множества:

$M_m = \{m_1, m_2, \ldots, m_k, m\}$ – множество отличных от единицы делителей числа m,

$M_{2m} = \{m_1, m_2, \ldots, m_j, 2m\}$ – множество отличных от единицы делителей числа $2m$,

$M = M_{2m} \backslash M_m$.

Теорема 1. *Для системы Коши — Римана* (4) *при* $a \neq 0$ *имеет место как общая порядков* $m_i \in M_m$, *так и частная порядков* $m_\nu \in M$ *сильная изохронность центра* $O(0,0)$. *В случае частной сильной изохронности угол*

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2m} - \frac{1}{m}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi k\right),$$

где $k \in \mathbb{Z}$ *и выбирается так, чтобы* $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$.

Теорема 2. *Для системы Коши — Римана* (4) *при* $a = 0$ *имеет место как общая порядков* $m_i \in M_m$, *так и частная порядков* $m_\nu \in M$ *сильная изохронность центра* $O(0,0)$. *В случае частной сильной изохронности угол* $\varphi_0 = 0$.

Исследование было поддержано FP7–PEOPLE–2012–IRSES–316338.

Литература

1. Абдуллаев Н. А. *Об изохронности при нелинейных колебаниях* // Тр. Тадж. учит. ин-та им. С. С. Айни. 1955. Вып. 3. С. 129–155.

2. Амелькин В. В., Чинь Зань Данг. *О сильной изохронности дифференциальных систем Коши — Римана* // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1993. № 2. С. 26–30.

3. Амелькин В. В., Чинь Зань Данг. *Об изохронности системы Коши — Римана в случае фокуса* // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1993. № 1. С. 28–31.